Formule N° 8 : L'irrationalité de $\sqrt{2}$

La formule $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ évoque un fait bien connu depuis l'antiquité : la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas un nombre rationnel, c'est-à-dire que l'on ne peut pas exprimer $\sqrt{2}$ comme fraction de deux entiers.

Les Grecs, bien entendu, n'utilisaient pas ce langage-là, ils disaient que la diagonale et le côté d'un carré sont incommensurables.

Beaucoup d'encre a coulé à ce sujet et on peut trouver des détails historiques intéressants ici : $\sqrt{2}$

Bien que la démonstration de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ soit présentée très tôt dans la scolarité, j'aimerais faire mention que l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est conséquence d'un théorème plus général et qui est un peu moins connu par le grand public : $\mathbb{Z}$ est un anneau intégralement clos.

Cela signifie que, si $\alpha \in \mathbb{Q}$ est solution d'un polynôme $*$unitaire$*$ à coefficients entiers, alors α est entier. Le mot "unitaire" signifie que le coefficient devant la plus grande puissance du polynôme doit être égal à 1.

Ce dernier résultat, démontré par Gauss en premier, a par exemple comme conséquence que, pour tout nombre premier p et tout entier $n > 1$ le nombre $\alpha = \sqrt[n]{p}$ est irrationnel. En effet on a bien $\alpha^n - p = 0$ (donc α est solution de $x^n - p = 0$ qui est un polynôme unitaire) et $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

Par exemple, on a que $\sqrt{17} \notin \mathbb{Q}$ ou que $\sqrt[6]{1291} \notin \mathbb{Q}$.

De même, ce résultat donne l'irrationalité d'autres nombres célèbres, comme par exemple $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le fameux nombre d'or (qui n'a rien de doré ceci dit), qui est solution de $x^2 - x - 1 = 0$ autre polynôme unitaire à coefficients entiers.